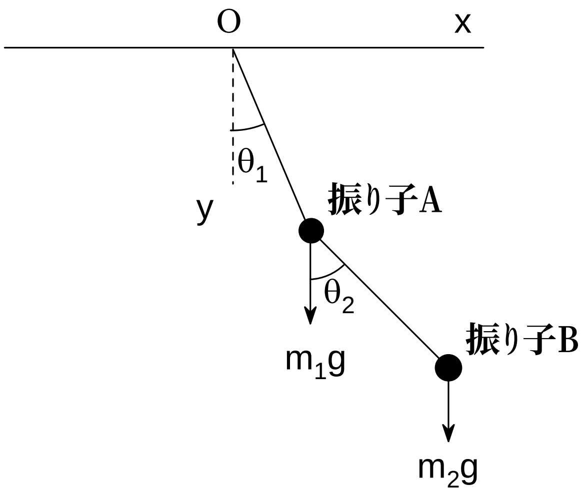
2重振り子の微分方程式

プロフェッショナル版限定機能

2重振り子の方程式はかなり複雑です。
式が長くて、分かりずらいため、
以下のような補助関数を導入します。
添字を多用していますが
これらは、文字修飾での入力です。



D_1, D_2, N_1, N_2を以下のように関数定義します。

$$D_1(\theta_1,\theta_2)=m_3 l_1^2 m_2 l_2^2-m_2^2 l_1^2 l_2^2\cos^2(\theta_1-\theta_2)$$

$$D_2(\theta_1,\theta_2)=m_2^2 l_1^2 l_2^2\cos^2(\theta_1-\theta_2)-m_3 l_1^2 m_2 l_2^2$$

$$N_1(\theta_1,\theta_2)=-m_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\times m_2 l_2^2\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2-m_2^2 l_1^2 l_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\times\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2$$
$$-m_3 g l_1\sin\theta_1 m_2 l_2^2+m_2^2 g l_1 l_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_2$$

$$N_2(\theta_1,\theta_2)=-m_2^2 l_1^2 l_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\times\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2-m_3 l_1^2 m_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\times\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2$$
$$-m_3 m_2 g l_1^2 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_1+m_3 l_1^2 m_2 g l_2\sin\theta_2$$

2重振り子の連立微分方程式は以下になります。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d^2\theta_1}{dt^2}&=\frac{N_1}{D_1}\\ \frac{d^2\theta_2}{dt^2}&=\frac{N_2}{D_2}\end{aligned}}$$

定数変数を以下のように代数代入定義します。

$l_1=10$　　$l_2=1$　　$m_1=10$　　$m_2=1$

$m_3=m_1+m_2$　　$g=9.8$

D_1, D_2, N_1, N_2を代数計算すると、以下のようになります。

$$D_1(\theta_1,\theta_2)=-100\cos^2(\theta_1-\theta_2)+1100$$

$$D_2(\theta_1,\theta_2)=100\cos^2(\theta_1-\theta_2)-1100$$

$$N_1(\theta_1,\theta_2)=98\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_2-1078\sin\theta_1$$

$N_2(\theta_1,\theta_2)=-10780\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_1+10780\sin\theta_2$

したがって2重振り子の連立微分方程式は以下になります。
微分方程式では必ず式番号をつけます。

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=\frac{98\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_2-1078\sin\theta_1}{-100\cos^2(\theta_1-\theta_2)+1100} \tag{11}$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}=\frac{-10780\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_1+10780\sin\theta_2}{100\cos^2(\theta_1-\theta_2)-1100} \tag{12}$$

微分方程式諸元表

上記方程式を解くためには必ず微分方程式諸元表を作成する必要があります。
「入力」-「表/行列」-「微分方程式の諸元表」で作成します。
以下はこの表の空欄に必要な初期値をセットしたものです。

initial value1はθ_1,θ_2の t=0 の時の値です。

initial value2は$\frac{d\theta_1}{dt},\frac{d\theta_2}{dt}$の t=0 の時の値です。

今回の方程式は、初期値の与え方によって多様なモードの解が得られます。

indepedent var	t	initial value	0	final value	10
step num	1000	output num	1000	equation num	2
dependent var	θ_1	θ_2			
initial value1	0.5	0.8			
initial value2	0.0	10.0			
expression id	(11)	(12)			

θ_1,θ_2のデータ数が多いので、ここでは先頭の100個をそれぞれ表示します。

θ_1,θ_2に対応する配列データは $\theta_1^{\{0\}}$, $\theta_2^{\{0\}}$ にセットされています。

$\left(\theta_1^{\{0\}}\right)_{1..100}$={0.5, 0.49998, 0.49991, 0.4998, 0.49965, 0.49945, 0.49921, 0.49893, 0.49861, 0.49824, 0.49782, 0.49737, 0.49686, 0.49631, 0.49572, 0.49508, 0.49438, 0.49365, 0.49286, 0.49202, 0.49113, 0.49019, 0.4892, 0.48817, 0.48708, 0.48594, 0.48475, 0.48351, 0.48223, 0.48089, 0.47951, 0.47808, 0.47661, 0.47509, 0.47353, 0.47193, 0.47028, 0.46859, 0.46687, 0.4651, 0.46329, 0.46144, 0.45955, 0.45762, 0.45565, 0.45365, 0.4516, 0.44951, 0.44738, 0.44521, 0.443, 0.44075, 0.43845, 0.43611, 0.43372, 0.43129, 0.42882, 0.4263, 0.42374, 0.42113, 0.41848, 0.41578, 0.41305, 0.41026, 0.40744, 0.40458, 0.40168, 0.39874, 0.39576, 0.39275, 0.38971, 0.38663, 0.38351, 0.38037, 0.37719, 0.37398, 0.37074, 0.36747, 0.36416, 0.36083, 0.35745, 0.35405, 0.35061, 0.34714, 0.34363, 0.34008, 0.33651, 0.33289, 0.32924, 0.32555, 0.32183, 0.31807, 0.31428, 0.31045, 0.30659, 0.30269, 0.29877, 0.29481, 0.29082, 0.28681}

$\left(\theta_2^{\{0\}}\right)_{1..100}$={0.8, 0.89995, 0.99953, 1.0987, 1.1973, 1.2953, 1.3927, 1.4894, 1.5854, 1.6806, 1.7749, 1.8685, 1.9612, 2.053, 2.144, 2.2341, 2.3233, 2.4117, 2.4993, 2.5861, 2.6722, 2.7575, 2.8421, 2.926, 3.0094, 3.0923, 3.1746, 3.2566, 3.3382, 3.4195, 3.5007, 3.5817, 3.6627, 3.7438, 3.8249, 3.9063, 3.988, 4.0699, 4.1524, 4.2353, 4.3187, 4.4027, 4.4875, 4.5729, 4.659, 4.746, 4.8338, 4.9224, 5.0119, 5.1022, 5.1934, 5.2856, 5.3786, 5.4725, 5.5672, 5.6627, 5.7591, 5.8562, 5.954, 6.0524, 6.1514, 6.2509, 6.3509, 6.4511, 6.5516, 6.6523, 6.7529, 6.8535, 6.954, 7.0541, 7.154, 7.2533, 7.3521, 7.4503, 7.5479, 7.6447, 7.7407, 7.8359, 7.9302, 8.0236, 8.1162, 8.2078, 8.2985, 8.3883, 8.4772, 8.5652, 8.6523, 8.7385, 8.824, 8.9087, 8.9926, 9.0759, 9.1586, 9.2407, 9.3224, 9.4037, 9.4846, 9.5653, 9.6458, 9.7263}

θ_1,θ_2が求められましたので、振り子A、Bの座標位置は以下のようになります。

$A_x=10\sin\left(\theta_1^{\{0\}}\right)$ 代入定義

$A_y=-10\cos\left(\theta_1^{\{0\}}\right)$ 代入定義

$B_x=10\sin(\Theta_1)+\sin\left(\theta_2^{\{0\}}\right)$ 代入定義

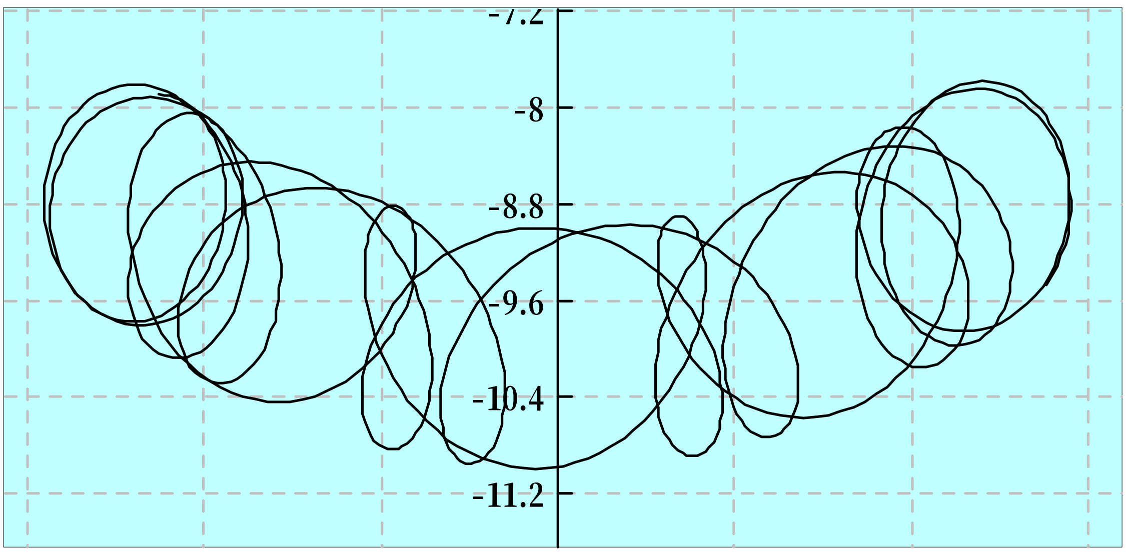
$B_y=-10\cos(\Theta_1)-\cos\left(\theta_2^{\{0\}}\right)$ 代入定義

これらの代入定義は配列になっていることに注目してください。

ここでは特に興味深い振り子Bの軌跡を関数グラフで描画してみます。

$\{B_x,B_y\}$ この配列データを2Dーグラフのデータ型(X-Y軸)で描画する。

振り子Bの回転した軌跡のグラフ



次にθ_2の微分の計算値を求めてみます。以下のようにして計算できます。

$(D_2)_{1..200}$={10, 9.9679, 9.9275, 9.8794, 9.8243, 9.7628, 9.6957, 9.6239, 9.5479, 9.4685, 9.3865, 9.3025, 9.2171, 9.131, 9.0448, 8.959, 8.8743, 8.7912, 8.7103, 8.6322, 8.5573, 8.4862, 8.4195, 8.3577, 8.3013, 8.2508, 8.2066, 8.1691, 8.1387, 8.1157, 8.1004, 8.0928, 8.0931, 8.1013, 8.1174, 8.1411, 8.1723, 8.2107, 8.256, 8.3077, 8.3654, 8.4287, 8.4971, 8.5699, 8.6468, 8.727, 8.8101, 8.8954, 8.9824, 9.0705, 9.159, 9.2474, 9.335, 9.4211, 9.5049, 9.5858, 9.6629, 9.7355, 9.8028, 9.8638, 9.9177, 9.9639, 10.001, 10.03, 10.049, 10.057, 10.056, 10.044, 10.022, 9.9901, 9.9493, 9.8999, 9.8427, 9.7784, 9.7079, 9.6319, 9.5514, 9.4671, 9.3798, 9.2902, 9.1992, 9.1073, 9.0154, 8.924, 8.8338, 8.7454, 8.6595, 8.5768, 8.4978, 8.4231, 8.3535, 8.2895, 8.2316, 8.1804, 8.1363, 8.1, 8.0716, 8.0515, 8.04, 8.0371, 8.043, 8.0576, 8.0808, 8.1123, 8.1519, 8.1991, 8.2537, 8.315, 8.3826, 8.4558, 8.5342, 8.617, 8.7036, 8.7934, 8.8858, 8.98, 9.0754, 9.1712, 9.2668, 9.3614, 9.4543, 9.5446, 9.6314, 9.7139, 9.7911, 9.8622, 9.9261, 9.982, 10.029, 10.066, 10.093, 10.109, 10.114, 10.107, 10.09, 10.061, 10.022, 9.9733, 9.9157, 9.85, 9.7771, 9.6981, 9.6137, 9.525, 9.4328, 9.338, 9.2414, 9.1439, 9.046, 8.9487, 8.8526, 8.7584, 8.6668, 8.5786, 8.4943, 8.4146, 8.3403, 8.2719, 8.21, 8.1552, 8.108, 8.0689, 8.0383, 8.0164, 8.0035, 7.9997, 8.0051, 8.0196, 8.043, 8.0751, 8.1157, 8.1642, 8.2202, 8.2832, 8.3526, 8.4277, 8.5081, 8.5929, 8.6816, 8.7735, 8.8678, 8.964, 9.0611, 9.1587, 9.2559, 9.3519, 9.446, 9.5373, 9.625, 9.7083, 9.7861, 9.8575, 9.9217, 9.9778, 10.025, 10.062, 10.089, 10.105, 10.109, 10.103}

振り子Bの速度を求めてみます。

$$B_x=10\sin\theta_1+\sin\theta_2$$

$$B_y=-10\cos\theta_1-\cos\theta_2$$

仮想関数定義をします。

$\theta_1(t)=\varnothing$　　関数定義

$\theta_2(t)=\varnothing$　　関数定義

θは具体的な関数が定義されていなくても下記のような微分計算ができます

$$v_x=\frac{d}{dt}(10\sin\theta_1+\sin\theta_2)=\frac{d\theta_2}{dt}\cos\theta_2+10\frac{d\theta_1}{dt}\cos\theta_1$$ 代数計算

$$v_y=\frac{d}{dt}(-10\cos\theta_1-\cos\theta_2)=-\left(-10\frac{d\theta_1}{dt}\sin\theta_1\right)+\frac{d\theta_2}{dt}\sin\theta_2$$ 代数計算

関数	配列データ
θ_1	$\theta_1^{\{0\}}$
θ_2	$\theta_2^{\{0\}}$
$\frac{d}{dt}(\theta_1)$	$\theta_1^{\{1\}}$
$\frac{d}{dt}(\theta_2)$	$\theta_2^{\{1\}}$

したがってv_x,v_yに対応する配列データは以下のようになります。

$v_x = \theta_2^{\{1\}} \cos\left(\theta_2^{\{0\}}\right) + 10\theta_1^{\{1\}} \cos\left(\theta_1^{\{0\}}\right)$　　代入定義

$v_y = 10\theta_1^{\{1\}} \sin\left(\theta_1^{\{0\}}\right) + \theta_2^{\{1\}} \sin\left(\theta_2^{\{0\}}\right)$　　代入定義

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$　　代入定義

$\{v\}$　　これをデータ型（Y軸）でグラフ表示すると以下のようになります。