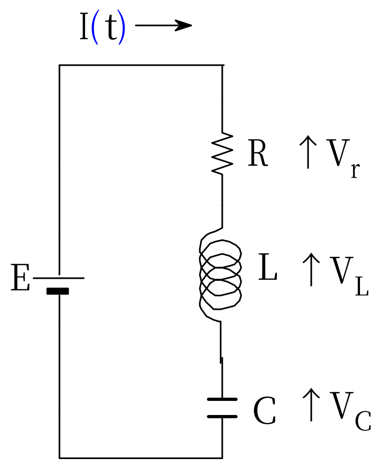
微分方程式の応用

コンデンサの過渡現象とラプラス変換



起電力E、抵抗R、自己インダクタンスL、静電容量Cの
右の回路の過渡現象を解いてみましょう。
キルヒホッフの法則から回路方程式は以下の
ようになります。
コンデンサにたまっている電荷量をQ(t)とします。
電流と電荷の関係から

R=50[Ω]
L=0.65[H]
C=22[μF]
E=5[V]

$$I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$$

従って抵抗での電圧降下は以下のようになります。

$$RI=R\frac{dQ(t)}{dt}$$

自己インダクタンスでの電圧降下は以下のようになります。

$$L\frac{dI(t)}{dt}=L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}$$

コンデンサでの電圧降下は$\frac{Q(t)}{C}$です。

従って以下の方程式が得られます。

$$E=R\frac{dQ(t)}{dt}+L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+\frac{Q(t)}{C}$$

ここでコンデンサでの時刻t=0での容量は0とします。
初期条件 $Q(0)=0$ $Q'(0)=0$

Laplace変換技法を使ってこの微分方程式を解いてみましょう。

$\boxed{Q(t)=\varnothing}$ 関数定義

$$R\mathcal{L}\left\{\frac{dQ(t)}{dt}\right\}=R\frac{d}{dt}\mathcal{L}\{Q(t)\}=R(s\mathcal{L}\{Q(t)\}-Q(0))=Rs\mathcal{L}\{Q(t)\}$$

$$L\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Q(t)}{dt^2}\right\}=L\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}\{Q(t)\}=L\left(s^2\mathcal{L}\{Q(t)\}-(sQ(0)+Q'(0))\right)=Ls^2\mathcal{L}\{Q(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{Q(t)}{C}\right\}=\frac{1}{C}\mathcal{L}\{Q(t)\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{E\}=\frac{E}{s}}$$

従って

$$Rs\mathcal{L}\{Q(t)\}+Ls^2\mathcal{L}\{Q(t)\}+\frac{1}{C}\mathcal{L}\{Q(t)\}=\frac{E}{s}$$

この式を$\mathcal{L}\{Q(t)\}$で解く

方法　　$\mathcal{L}\{Q(t)\}$をTと置く

$$RsT+Ls^2T+\frac{1}{C}T=\frac{E}{s}$$

これをカルキングの方程式（一元多項式の記号解）で解くと以下になる。

$$T=\frac{1}{Rs+Ls^2+\frac{1}{C}}\frac{E}{s}=\frac{CE}{CLs^3+CRs^2+s}$$

従って

$$\mathcal{L}\{Q(t)\}=\frac{CE}{CLs^3+CRs^2+s}$$

この両辺に逆Laplace変換すると

$$Q(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{CE}{CLs^3+CRs^2+s}\right\}$$　　$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{Q(t)\}\}=Q(t)$　だから

ここで記号式のままでは逆Laplace変換は求まりません。ここでは以下の値で解いてみます。

R=50[Ω]

L=0.65[H]

C=22[μF]

E=5[V]

しかし単位が付いたままでは解けません。そのため標準単位で求め無単位化する。

Cの部分は以下のようにしてF単位にできます。

C=22[μF]　　これをいったん代入します。

C=[F]　　このようにして単位を指定して計算します。

C=0.000022[F]

このような準備して下記の4つの単位部を除いた式を「代数代入」する。

代入定義（数値モード）ではなく代数代入するのは、後で代数計算で参照するためです。

$R=50$

$L=0.65$

$C=0.000022$

$E=5$

この値を使って

$$\frac{CE}{CLs^3+CRs^2+s}=\frac{0.00011}{0.0000143s^3+0.0011s^2+s}$$ 代数計算

以下の記号処理（代数計算、代数代入）での計算精度は6桁にしています。

逆Laplace変換を求めるに先だって必ず部分分数分解をする必要があります。

$$\mathrm{partial\_fract\_decompose}\left(\frac{0.00011}{0.0000143s^3+0.0011s^2+s}\right)=\frac{-0.00011s-0.00846154}{s^2+76.9231s+69930.1}+\frac{0.00011}{s}$$

プロパティ
代数計算
精度6桁

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.00011}{s}+\frac{-0.00011s-0.00846154}{s^2+76.9231s+69930.1}\right\}$$

$$=0.00011-0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t)-0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t)$$

$$=-0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t)-0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t)+0.00011$$

故に得られた解は以下の通りになる。

$$Q(t)=-0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t)-0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t)+0.00011$$

検算

$Q(t)$を関数定義する。

$$Q(t)=-0.00011e^{-38.4616t}\cos(261.631t)-0.0000161707e^{-38.4616t}\sin(261.631t)+0.00011$$

初期値の確認

$t=0$ 代入

$Q(0)=0$ 計算

$Q'(0)=0$ の確認

Qの一階微分の関数を求める

$$\frac{dQ(t)}{dt}=0.0000000195883e^{-38.4616t}\cos(261.631t)+0.02940136099512e^{-38.4616t}\sin(261.631t)$$

この関数を使ってt=0での値を求める。

$$0.0000000195883e^{-38.4616t}\cos(261.631t)+0.02940136099512e^{-38.4616t}\sin(261.631t)=0.0000000195883$$

0に近い

微分方程式の検算

$$R\frac{dQ(t)}{dt}+L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+\frac{Q(t)}{C}-E=0.000000350741e^{-38.4616t}\cos(261.631t)-0.00000230055e^{-38.4616t}\sin(261.631t)$$

0に近い

有効桁数6桁で解いているので少し誤差が出ます。