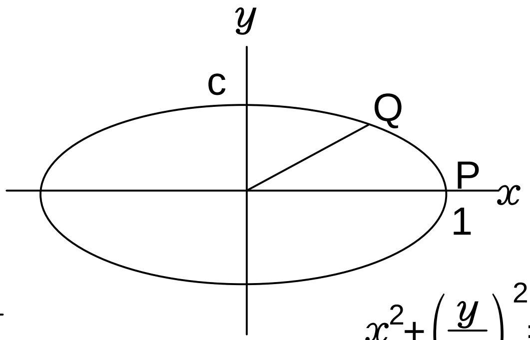
楕円積分の応用



$$x^2+\left(\frac{y}{c}\right)^2=1$$

楕円の弧長を求めてみます。

右図のPからQまでの弧長です。

$$L=\int ds=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$=\int\sqrt{1+\left(\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx$$

$$=\int\sqrt{\frac{1-x^2+c^2x^2}{1-x^2}}dx$$

離心率$\kappa=\sqrt{1-c^2}$　とすれば

$$L=\int\sqrt{\frac{1-\kappa^2x^2}{1-x^2}}dx$$

注　　$\kappa=0$　この時は真円になります。

これはカルキングの第二種不完全楕円積分に一致しています。

$$E(x\,;k)=\int_0^x\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{(1-t^2)}}dt$$

したがって

$$L=E(x\,;\kappa)$$

計算例

$x=0.3$　　　$\kappa=0.5$

$$L=E(x\,;\kappa)=0.30353176542728$$