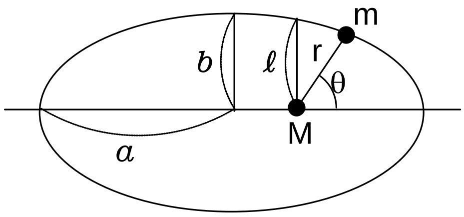
太陽系の惑星運動の方程式

質量Mの周りを、質量mの物体が、万有引力の法則のもとで回転する運動方程式

この運動方程式は、x-y座標系よりも
極座標系が便利です。
「極座標変換への微分応用」を参考にしてください。
このファイルの最後の式から、以下の微分方程式が
出てきます。



$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)+\frac{GMm}{r^2}=0 \qquad (1)$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \qquad (2)$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{GM}{r^2}=0 \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \qquad (4)$$

$\swarrow$

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{GM}{r^2}=0$$

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=h$$

面積速度一定を示す。
(hは面積速度)

$\longrightarrow$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{4h^2}{r^3}-\frac{GM}{r^2} \qquad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{2h}{r^2} \qquad (7)$$

(6)、(7)を解くためにrの代わりに逆数の u を導入する

新しい従属変数 u を導入

$$r=\frac{1}{u} \qquad (5)$$

これにより(7)式から(8)式が得られる

$$\frac{d\theta}{dt}=2hu^2 \qquad (8)$$

(5)式の両辺をtで微分する(手計算)

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \frac{dr}{dt}=-2h\frac{du}{d\theta} \qquad (9)$$

(9)式の両辺をtで微分する(手計算)

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-2h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{\text{(8)式より}} \frac{d^2r}{dt^2}=-2h\frac{d^2u}{d\theta^2}(2hu^2)=-4h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-4h^2 2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (10)$$

$$\boxed{\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{4h^2}{r^3}-\frac{GM}{r^2} \qquad (6)} \longrightarrow \boxed{-4h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}=4h^2u^3-GMu^2 \qquad (11)}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}=-u+\frac{GM}{4h^2} \qquad (12)}$$

この種の微分方程式の解は以下の式になる

$$u=a\cos(\theta+\alpha)+\frac{GM}{4h^2}$$

uからrに戻すと

$$r=\frac{1}{a\cos(\theta+\alpha)+\frac{GM}{4h^2}}$$

$$r=\frac{\ell}{1+e\cos(\theta-\alpha)} \qquad \ell=\frac{4h}{GM} \qquad e=\sqrt{1+\frac{4ah^2}{(GM)^2}}$$

$0<e<1$ の時は楕円になる

長径短径が a , b の時の楕円の面積は πab である。

h は面積速度である。

したがって周期 T は以下の式で求められる。

$$T=\frac{\pi ab}{h}$$

$$a=\frac{1}{2}\left\{\frac{\ell}{1+e}+\frac{\ell}{1-e}\right\}$$

$$\ell=a(1-e^2)$$

$$b=a\sqrt{1-e^2}$$

$$4h^2=GM\ell=GMa(1-e^2)$$

$$T^2=\left(\frac{\pi ab}{h}\right)^2=\frac{4\pi^2a^2}{GM}=\frac{4\pi^2a^2}{GM}$$

この式から太陽の質量を計算できる。

$$M=\frac{4\pi^2a^3}{GT^2}$$

地球公転の周期は　$T=3.155815\times10^{7}\mathrm{s}$

長軸の長さ　$a=1.4959787\times10^{11}\mathrm{m}$

重力定数　$G=6.67428\times10^{-11}\mathrm{m^{3}s^{-2}kg^{-1}}$

したがって

太陽の質量　M　$M=\dfrac{4\pi^{2}\alpha^{3}}{GT^{2}}=1.98842\times10^{30}\mathrm{kg}$

ちなみにWikipediaで調べた値　$1.9891\times10^{30}\mathrm{kg}$