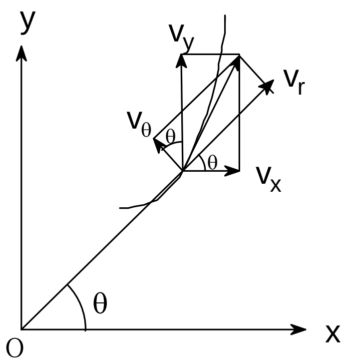
極座標変換への微分応用



地球の運動方程式を解くときには、x-y座標よりも
極座標系の方が、微分方程式を解くときに便利です。
この計算は通常、手計算で行いますが結構複雑です。
ここでは、カルキングの記号計算を使って、
r方向、θ方向の加速度成分を求めてみます。
ただし一部は手計算が必要になりますが、全て
手計算するよりもはるかに便利です。

記号計算機能だけでなく、カルキングの数式置換機能も利用します。

応用上の基本は、$\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \frac{d^2\theta}{dt^2}$に代わりに$r^{(1)}, \theta^{(1)}, r^{(2)}, \theta^{(2)}$を利用することです。右肩の(1),(2)は文字修飾です。

通例、右肩の(1),(2)は微分階数を表しますので、この類推からこの名前にしました。

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

仮想関数定義する

$$r(t)=\varnothing \qquad \theta(t)=\varnothing$$

手入力　　　　カルキングでの記号計算

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(r\cos\theta)=-r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta+\frac{dr}{dt}\cos\theta$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(r\sin\theta)=r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+\frac{dr}{dt}\sin\theta$$

したがって

$$v_x=-r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta+\frac{dr}{dt}\cos\theta \qquad (1)$$

$$v_y=r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+\frac{dr}{dt}\sin\theta \qquad (2)$$

(1),(2)に対して置換表を適用すると以下のようになる

$$\boxed{\begin{array}{l} v_x=-r\theta^{(1)}\sin\theta+r^{(1)}\cos\theta \\ v_y=r\theta^{(1)}\cos\theta+r^{(1)}\sin\theta \end{array}}$$

仮想関数定義

$$\theta^{(1)}(t)=\varnothing \qquad r^{(1)}(t)=\varnothing$$

代数代入定義

$$v_x=-r\theta^{(1)}\sin\theta+r^{(1)}\cos\theta \qquad (3)$$

$$v_y=r\theta^{(1)}\cos\theta+r^{(1)}\sin\theta \qquad (4)$$

v_r, v_θを以下のように定義する

$$v_r=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta$$
$$v_\theta=-v_x\sin\theta+v_y\cos\theta$$

$$v_r=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta\overset{\text{代数計算}\downarrow}{=}r^{(1)}\cos^2\theta+r^{(1)}\sin^2\theta\overset{\text{因数分解}\downarrow}{=}r^{(1)}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\overset{\text{手計算}\downarrow}{=}r^{(1)}$$
$$v_\theta=-v_x\sin\theta+v_y\cos\theta=r\theta^{(1)}\cos^2\theta+r\theta^{(1)}\sin^2\theta=\theta^{(1)}r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\theta^{(1)}r$$

したがって

$$\boxed{v_r=r^{(1)} \quad v_\theta=\theta^{(1)}r}$$

a_r, a_θを以下のように定義する

$$\boxed{a_r=a_x\cos\theta+a_y\sin\theta \quad a_\theta=-a_x\sin\theta+a_y\cos\theta}$$

(3),(4)から

$$\frac{dv_x}{dt}\overset{\text{代数計算}\downarrow}{=}\left(\frac{dr^{(1)}}{dt}\cos\theta-\frac{d\theta}{dt}r^{(1)}\sin\theta\right)+\left(-r\frac{d\theta^{(1)}}{dt}\sin\theta+\left(-r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta-\frac{dr}{dt}\sin\theta\right)\theta^{(1)}\right)$$

上記の式に、$\frac{d\theta}{dt},\frac{dr}{dt},\frac{dr^1}{dt},\frac{d\theta^1}{dt}$の置換をすると以下の式になる

$$\frac{dv_x}{dt}=(r^{(2)}\cos\theta-\theta^{(1)}r^{(1)}\sin\theta)+(-r\theta^{(2)}\sin\theta+(-r\theta^{(1)}\cos\theta-r^{(1)}\sin\theta)\theta^{(1)})$$

右辺を代数計算する

$$(r^{(2)}\cos\theta-\theta^{(1)}r^{(1)}\sin\theta)+(-r\theta^{(2)}\sin\theta+(-r\theta^{(1)}\cos\theta-r^{(1)}\sin\theta)\theta^{(1)})$$
$$=-r(\theta^{(1)})^2\cos\theta+r^{(2)}\cos\theta-r\theta^{(2)}\sin\theta-2r^{(1)}\theta^{(1)}\sin\theta$$

search_table

$\frac{d\theta}{dt}$	$\theta^{(1)}$
$\frac{dr}{dt}$	$r^{(1)}$
$\frac{dr^{(1)}}{dt}$	$r^{(2)}$
$\frac{d\theta^{(1)}}{dt}$	$\theta^{(2)}$

他方 $a_x=\frac{dv_x}{dt}$

したがって

$$\boxed{a_x=-r(\theta^{(1)})^2\cos\theta+r^{(2)}\cos\theta-r\theta^{(2)}\sin\theta-2r^{(1)}\theta^{(1)}\sin\theta}$$

同様に

$$\frac{dv_y}{dt}=\left(r\frac{d\theta^{(1)}}{dt}\cos\theta+\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-\frac{d\theta}{dt}r\sin\theta\right)\theta^{(1)}\right)+\left(r^{(1)}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+\frac{dr^{(1)}}{dt}\sin\theta\right)$$

上記の式に、$\frac{d\theta}{dt},\frac{dr}{dt},\frac{dr^1}{dt},\frac{d\theta^1}{dt}$の置換を施すと以下の式になる。

$$\frac{dv_y}{dt}=(r\theta^{(2)}\cos\theta+(r^{(1)}\cos\theta-\theta^{(1)}r\sin\theta)\theta^{(1)})+(r^{(1)}\theta^{(1)}\cos\theta+r^{(2)}\sin\theta)$$

右辺を代数計算する

$$(r\theta^{(2)}\cos\theta+(r^{(1)}\cos\theta-\theta^{(1)}r\sin\theta)\,\theta^{(1)})+(r^{(1)}\theta^{(1)}\cos\theta+r^{(2)}\sin\theta)$$

$$=r\theta^{(2)}\cos\theta+2r^{(1)}\theta^{(1)}\cos\theta-r(\theta^{(1)})^2\sin\theta+r^{(2)}\sin\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned}a_x&=-r(\theta^{(1)})^2\cos\theta+r^{(2)}\cos\theta-r\theta^{(2)}\sin\theta-2r^{(1)}\theta^{(1)}\sin\theta\\ a_y&=r\theta^{(2)}\cos\theta+2r^{(1)}\theta^{(1)}\cos\theta-r(\theta^{(1)})^2\sin\theta+r^{(2)}\sin\theta\end{aligned}}$$

さらに仮想関数定義を行う

$r^{(2)}(t)=\varnothing$ $\theta^{(2)}(t)=\varnothing$

以下の2式を代数代入定義する

$$a_x=-r(\theta^{(1)})^2\cos\theta+r^{(2)}\cos\theta-r\theta^{(2)}\sin\theta-2r^{(1)}\theta^{(1)}\sin\theta$$

$$a_y=r\theta^{(2)}\cos\theta+2r^{(1)}\theta^{(1)}\cos\theta-r(\theta^{(1)})^2\sin\theta+r^{(2)}\sin\theta$$

他方以下の2式より

$$a_r=a_x\cos\theta+a_y\sin\theta$$

$$a_\theta=-a_x\sin\theta+a_y\cos\theta$$

$$a_r=a_x\cos\theta+a_y\sin\theta=-r(\theta^{(1)})^2\cos^2\theta+r^{(2)}\cos^2\theta-r(\theta^{(1)})^2\sin^2\theta+r^{(2)}\sin^2\theta$$

右辺の式を代数計算して簡素化する。

$$-r(\theta^{(1)})^2\cos^2\theta+r^{(2)}\cos^2\theta-r(\theta^{(1)})^2\sin^2\theta+r^{(2)}\sin^2\theta$$

$$=r^{(2)}\cos^2\theta+r^{(2)}\sin^2\theta-r(\theta^{(1)})^2\cos^2\theta-r(\theta^{(1)})^2\sin^2\theta$$ 手計算で式の順序を変更する

$$=r^{(2)}-r(\theta^{(1)})^2=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$ 手計算で式の順序を変更する

同様に

$$a_\theta=-a_x\sin\theta+a_y\cos\theta=r\theta^{(2)}\cos^2\theta+2r^{(1)}\theta^{(1)}\cos^2\theta+r\theta^{(2)}\sin^2\theta+2r^{(1)}\theta^{(1)}\sin^2\theta$$

$$=r\theta^{(2)}\cos^2\theta+r\theta^{(2)}\sin^2\theta+2r^{(1)}\theta^{(1)}\cos^2\theta+2r^{(1)}\theta^{(1)}\sin^2\theta$$

$$=r\theta^{(2)}+2r^{(1)}\theta^{(1)}=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

したがって

$$\boxed{\begin{aligned}a_r&=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\\ a_\theta&=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\end{aligned}}$$